13/05 <u>Опр.</u> Говорят, что в-р $x=(x^1,\dots,x^l)\in\mathbb{R}^l$ **лексикографически положителен**, if $x\neq 0$ и 1ая ненулев. коорд $x>0$. <u>Обозн.</u>: $x\succ 0$

<u>Пример</u> $(0,1,-1,3)$ – да; $(-1,0,0,0)$ – нет.

Говорят, что в-р $x\in\mathbb{R}^l$ **лексикографически $>$** в-ра $y\in\mathbb{R}^l$, if $x-y\succ 0$ $(x\succ y)$

Св-ва: 1) $x\succ y,\ y\succ z \Rightarrow x\succ z$

2) $x\succ 0 \Leftrightarrow \alpha x\succ 0,\ \forall\alpha>0$

3) $x\succ 0,\ y\succ 0 \Rightarrow x+\alpha y\succ 0,\ \forall\alpha>0$

4) $x\succ 0 \Rightarrow y\succ y-\alpha x,\ \forall\alpha>0,\ \forall y\in\mathbb{R}^l$

<u>Опр</u> $\exists$ $X=\{x_i=(x_i^1,\dots,x_i^l),\ i\in M_0\}$ – заданное мн-во в-ов. В-р $x_s\in X$ наз-ся **лексикографическим минимумом мн-ва** $X$, if $\forall i\in M_0$ можно сказать, что либо $x_i\succ x_s$, либо $x_i=x_s$. <u>Обозн</u>: $x_s=\operatorname{lexmin}\limits_{i\in M_0} x_i$

<u>Лемма 1</u> (о лексикографич. min) $\exists$ $M_0$ – конечн. мн-во номеров и $\exists$ в мн-ве $X=\{x_i\in\mathbb{R}^l,\ i\in M_0\}$ все в-ры различны. Тогда $\operatorname{lexmin}\limits_{i\in M_0} x_i$ достиг-ся на ! в-ре $x_s\in X$ (т.е. $x_i\succ x_s,\ \forall i\in M_0$ и случай $x_i=x_s$ при $i\neq s$ невозможен) //Типа Т Вейерштр.//

▲ (Конструктивное $\Rightarrow$ укажем способ нахождения $x_s$). If $M_0$ состоит из 1 номера, то все ясно. Иначе составим мн-во $M_1=\{s: s\in M_0,\ x_s^1=\min\limits_{i\in M_0} x_i^1\}$

If $M_1$ состоит из одного номера, то процесс закончен.

$x_s = \operatorname{lexmin}_{i\in M_0} x_i$. If $M_1$ состоит более чем из одного эл-та, то построим мн-во $M_2 = \{s : s\in M_1,\ x_s^2 = \min_{i\in M_1} x_i^2\}$

$\exists$ уже построены $M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_p = \{s : s\in M_{p-1},\ x_s^p = \min_{i\in M_{p-1}} x_i^p\}$

If $M_p$ состоит из 1 номера, то $x_i \succ x_s,\ \forall i\in M_{p-1}$ и тем более $\forall i\in M_{p-2}$ и $\forall i\in M_0$, т.е. $x_s = \operatorname{lexmin}_{i\in M_0} x_i$. If $M_p$ состоит более, чем из 1 номера, то продолжим процесс. Он либо законч-ся на шаге $p<l$, либо законч-ся на шаге $p=l$ построением мн-ва $M_l = \{s : s\in M_{l-1},\ x_s^l = \min_{i\in M_{l-1}} x_i^l\}$ // $x_s = \operatorname{lexmin}_{i\in M_0} x_i$

Все коорд-ты проанализированы, дальше идти некуда. Это мн-во будет содержать только 1 номер. В самом деле, if в $M_l$ 2 номера $s_1$ и $s_2$, это значило бы, что $x_{s1} = x_{s2}$. Но все в-ра различны $\Rightarrow$ !? ■

Сформулируем лексикогр. правило выбора разреш. эл-та:

$$\boxed{\frac{\Gamma_s(\vartheta)}{\gamma_s^k} = \operatorname{lexmin}_{i\in I_k(\vartheta)} \frac{(\Gamma_i(\vartheta))^{\text{в-р}}}{(\gamma_i^k)},\quad s\in I_k(\vartheta)} \quad (н) \qquad // \frac{\Gamma_i(\vartheta)}{\gamma_i^k} = \left(\frac{\vartheta^{j_i}}{\gamma_i^k}, \frac{\gamma_i^1}{\gamma_i^k}, \ldots\right) //$$

кандидаты на разреш. эл-т

Покажем, что данное правило явл-ся антициклином. Прежде всего заметим, что new правило заменяет old.

$$\min_{i\in I_k(\vartheta)} \frac{\vartheta^{j_i}}{\gamma_i^k} = \frac{\vartheta^{j_s}}{\gamma_s^k} \Rightarrow \min_{i\in I_k(\vartheta)} \frac{\gamma_i^0}{\gamma_i^k} = \frac{\gamma_s^0}{\gamma_s^k}$$

Учитывая, что $\Gamma_i(\vartheta) = \{\gamma_i^0, \gamma_i^1, \ldots, \gamma_i^n\}_{\text{лин/нез.}}$ // $rg = r$ //

Далее заметим, что все в-ра $\left(\frac{\Gamma_i(\vartheta)}{\gamma_i^k}\right)$, $i\in I_k(\vartheta)$ различны (т.к. лин/нез.) и по лемме о лексикографич. min new правило однозначно определяет номер $s$. В самом деле,

$\Gamma = (B^{-1}b, B^{-1}A_1, \ldots, B^{-1}A_n) = B^{-1}(b, A_1, \ldots, A_n) = B^{-1}(b, A)$.

$rg$ м-цы $(b, A) = r$ в силу совместности с-мы, умножение на м-цу $rg$-а не меняет $\Rightarrow$ строки $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ — лин/нез $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\Gamma_i(\vartheta)}{\gamma_i^k} \neq \frac{\Gamma_j(\vartheta)}{\gamma_j^k} \Rightarrow$ по лемме о лексикогр. min номер $s$ опр-ся однозначно.

Опр **Симплекс-таблицу** $S = S(\vartheta, B(\vartheta))$ угл. точки $\vartheta$ с баз. $B(\vartheta)$ назовем **лексикогр. положит-й** и будем обозн-ть $S \succ^{\Gamma} 0$, if все ее строки $\Gamma_i \succ 0$, $i=\overline{1,r}$. Скажем, что табл. $S(\vartheta, B(\vartheta))$ **лексикогр. $\succ$** $S(\omega, B(\omega))$ и будем обозн-ть $S(\vartheta, B(\vartheta)) \succ^{\Delta} S(\omega, B(\omega))$, if строка $\Delta(\vartheta) \succ \Delta(\omega)$

**Лемма 2** If $S(\vartheta, B(\vartheta)) \succ^{\Gamma} 0$ и табл. $S(\omega, B(\omega))$ получена с помощью симплекс-мет. + антизиклина, то

$$S(\omega, B(\omega)) \succ^{\Gamma} 0, \quad S(\vartheta, B(\vartheta)) \succ^{\Delta} S(\omega, B(\omega))$$

▲ I $S(\vartheta, B(\vartheta)) \succ^{\Gamma} 0 \Rightarrow \Gamma_i(\vartheta) \succ 0,\ \forall i=\overline{1,r}$

$$S(\omega, B(\omega)):\ \Gamma_s(\omega) = \frac{\overset{\succ 0}{\Gamma_s(\vartheta)}}{\underset{>0}{\gamma_s^k}} \succ 0$$

$$i \neq s:\ \Gamma_i(\omega) = \Gamma_i(\vartheta) - \gamma_i^k \underbrace{\Gamma_s(\omega)}_{= \frac{\Gamma_s(\vartheta)}{\gamma_s^k}} \overset{?}{\succ} 0$$

а) $i \in I_k(\vartheta) \Rightarrow \gamma_i^k > 0$

Согласно (H) [антизиклин]: $\dfrac{\Gamma_i(\vartheta)}{\gamma_i^k} \succ \dfrac{\Gamma_s(\vartheta)}{\gamma_s^k}\ \Big|\ \gamma_i^k > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \Gamma_i(\vartheta) \succ \gamma_i^k \frac{\Gamma_s(\vartheta)}{\gamma_s^k} \Rightarrow \Gamma_i(\omega) \succ 0$$

б) $i \notin I_k(\vartheta) \Rightarrow \Gamma_i(\omega) = \overset{\succ 0}{\Gamma_i(\vartheta)} - \underset{\leq 0}{\gamma_i^k} \overset{\succ 0}{\Gamma_s(\omega)} \succ 0$

$\Rightarrow S(\omega, B(\omega)) \succ^{\Gamma} 0$

II. $S(\vartheta, B(\vartheta)) \succ^{\Delta} S(\omega, B(\omega))$

$\Delta(\vartheta) \overset{?}{\succ} \Delta(\omega)$

$$\Delta(\omega) = \Delta(\vartheta) - \overset{<0}{\Delta_k(\vartheta)} \overset{\succ 0}{\Gamma_s(\omega)} \Rightarrow \Delta(\vartheta) - \Delta(\omega) \succ 0 \ ■$$

Покажем, что антизиклин позволяет избежать зацикливания

] $(\vartheta_0, B(\vartheta_0))$ — начал. угл. т. $\Rightarrow$ {симплекс-мет.} $\Rightarrow$

$\Rightarrow S(\vartheta_0, B(\vartheta_0)) \to S(\vartheta_1, B(\vartheta_1)) \to \ldots \to S(\vartheta_e, B(\vartheta_e)) \to \ldots$

If $S(\vartheta_0, B(\vartheta_0)) \succ^{\Gamma} 0 \Rightarrow S(\vartheta_0, B(\vartheta_0)) \succ S(\vartheta_1, B(\vartheta_1)) \succ \ldots \succ$

$\succ S(\vartheta_e, B(\vartheta_e)) \succ \ldots \Rightarrow$ симп-табл не могут повтор-ся, и т.к.

число угл. точек конечно $\Rightarrow$ симп-процесс конечен

А что if $S(v_0, B(v_0)) \cancel{\succ} 0$? Мы можем это гарантировать, if мы передвинем (например) все базис. коорд-ты влево, тогда самая 1я ненул. у каждой из $\Gamma = 1 > 0 \Rightarrow$ таблица станет лексикогр. $> 0$ (т.е. все зависит от порядка)

1) Как найти начал. угл.т.? 2) Вдруг ее нет? — на эти вопросы дадим ответы при помощи симплекс. метода

9) Выбор начал. угл. т. мн-ва

$U = \{u \geq 0 : Au = b\}$

До этого мы предполагали, что известна какая-либо угл. т. $(v, B(v))$. Но пока мы даже не знаем, всегда ли $U$ имеет угл. т., пусто оно или непусто.

## Метод искусственного базиса

Далее будем считать, что $b \geq 0$. В пр-ве перем-х $z = \binom{x}{u} = (x^1, \ldots, x^m, u^1, \ldots, u^n)^T \in E^{m+n}$ $\ast$ вспомогат. канон. зад. ЛП

$g(z) = x^1 + \ldots + x^m = \langle 1_m, \overset{\text{баз.}}{x} \rangle + \langle 0, \overset{\text{небаз.}}{u} \rangle = \langle d, z \rangle \to \inf,\ z \in Z = \{z \geq 0 : x + Au = b\} = \{z \geq 0 : Cz = b\}$, $d = (1_m, 0)^T$, $C = \overset{m \times (m \times n)}{(I_m\ A)}$ (1)

В этой зад. $\operatorname{rg} C = m < m+n$, 1 угл. т. $z_0 = \binom{b}{0}$ угадывается сразу, ее базис $B(z_0) = (e_1, \ldots, e_m) = I_m$ — 1ые $m$ столбцов м-цы $C$, они лин/нез. и $e_1 b^1 + \ldots + e_m b^m = I_m b = b$ — критерий д/угл.т. $z_0$ выполнен

С-ма $Cz = b$ сама явл-ся приведенной к угл.т. $z_0$ с-мой.

$x + Au = b \Rightarrow x = b - Au \Rightarrow \overset{\text{базис}}{b} = x + Au$ // $\Delta_i = \langle \bar{c}, \overset{I_m}{B^{-1}} A_i \rangle - \overset{0}{c_i} = \langle 1_m, A_i \rangle$

Симп-табл. $S(z_0, B(z_0))$ легко заполн-ся:

$$S(z_0, B(z_0)) = \begin{pmatrix} \overset{y}{b} & \overset{\text{баз. коорд.}}{I_m} & \overset{\text{небаз. коорд.}}{A} \\ \Delta_0 & 0 & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & e_1 & \ldots & e_m & A_1 & \ldots & A_n \\ \Delta_0 & 0 & \ldots & 0 & \Delta_{m+1} & \ldots & \Delta_{m+n} \end{pmatrix} \overset{\Gamma}{\succ} 0$$, где

$\Delta_0 = \langle d, z_0 \rangle = \sum_{i=1}^{m} b^i$, $\Delta_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}$. Применим к этой зад. симп-мет с антициклином. Симп-процесс законч-ся за конеч. число шаиз реализаций случая $\tilde{I}$, т.к. случай $\tilde{\underline{II}}$ здесь невозможен: $g(z)\geqslant 0$, $\forall z\in Z$ и $g_* \geqslant 0 > -\infty$. На последнем шаге получим угл. т. $z_* = \begin{pmatrix} x_* \\ u_* \end{pmatrix} \in Z$ со знач-м $g(z_*) = g_* \geqslant 0$ — реш-е зад.(1). Имеются 2 возмож-ти:

1) $g(z_*) = g_* > 0 \Longrightarrow U = \emptyset$. В самом деле, if $U \neq \emptyset$, тогда возьмем $u_0 \in U$. Нетрудно проверить, что $\bar{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_0 \end{pmatrix} \in Z$, причем $g(\bar{z}) \overset{=\langle 1, \bar{x}\rangle = 0}{=} 0 < g_* = 0 \Longrightarrow$ !? // $\bar{z} \geqslant 0$ (т.к. $u_0 \in U \Rightarrow u_0 \geqslant 0$) // $\bar{x} + A\bar{u} = b \to Au_0 = b$

2) $g(z_*) = g_* = 0 \Rightarrow z_* = \begin{pmatrix} x_* = 0 \\ v_* \end{pmatrix} \geqslant 0 \Rightarrow v_* \geqslant 0$. Кроме того, $Cz_* = x_* + Av_* = b \Rightarrow Av_* = b \Rightarrow v_* \in U$. Покажем, что $v_*$ — угл. т. мн-ва $U$. От противного, $\exists$ $v_*$ — не угл. т. мн-ва $U$, т.е. она явл-ся внутр. т. какого-либо отр-ка $[v_1, v_2] \in U$, $v_1 \neq v_2$, или иначе $v_* = \alpha_0 v_1 + (1-\alpha_0) v_2$, где $v_1, v_2 \in U$, $v_1 \neq v_2$, $0 < \alpha < 1$. Нетрудно проверить, что $z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix}$, $z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \in Z$, $z_1 \neq z_2$ и $z_* = \begin{pmatrix} 0 \\ v_* \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix} + (1-\alpha_0)\begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} = \alpha_0 z_1 + (1-\alpha_0) z_2$, что противоречит тому, что $z_*$ — угл. т. мн-ва $Z \Rightarrow v_*$ — угл. т. мн-ва $U$.

10) Основные $\underset{\sim}{T}$-ы ЛП

$\underset{\sim}{T_1}$ If $U = \{u \geqslant 0 : Au = b\} \neq \emptyset$, то $U$ имеет хотя бы 1 угл. т.

$\underset{\sim}{T_2}$ (Вейерштрасса) If в канон. зад. ЛП $U \neq \emptyset$, $J_* = \inf\limits_U \langle c, u\rangle > -\infty$, то $U_* \neq \emptyset$

$\underset{\sim}{T_3}$ If канон. зад. ЛП разрешима, то среди ее реш-й $U_*$ обязат. найдется хотя бы 1 угл. т. мн-ва $U$.

11) $\underset{\sim}{T}$ Куна-Таккера д/канон. зад. ЛП

$J(u) = \langle c, u\rangle \to \inf$, $u \in U = \{u \geqslant 0 : Au - b = 0\}$ (2)

Ф-ция Лагр. здесь имеет вид: $L(u, \lambda) = \langle c, u \rangle + \langle \lambda, Au - b \rangle$, $u \geq 0, \lambda \in E^m$ (3)

Седлов. т.: $L(u_*, \lambda) \leq L(u_*, \lambda^*) \leq L(u, \lambda^*), \forall u \in E^n_+, \forall \lambda \in E$ (н)

$T_H$ (Куна-Таккера) Д/ того, чтобы $u_* \in E^n_+$ была реш-м зад. (2) $\Leftrightarrow$ нашлось $\lambda^* \in E$: $(u_*, \lambda^*)$ была бы седл. т. ф-ции $L(u, \lambda)$ в смысле (н)

Д/З: 1) В чем отличие этой $T$ К-Т от пред. изученной?
2) Построить ДЗ к зад. ЛП;
3) Построить ДЗ к ДЗ ЛП. } необяз.